Solución analítica con tecnología de producción lineal:

- $y_t = A_t l_t$
- Problema del hogar:

$$\frac{c_{t+1}^*}{c_t^*} = \beta(1+r_t) \longrightarrow \text{cond. intertemporal.}$$

$$\frac{\gamma c_t^*}{H_t - l_t^*} = A_t \longrightarrow \text{cond. intratemporal}$$

ingresos del hogar

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{c_t^*}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} = \sum_{t=1}^{T} \frac{A_t l_t^*}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})} \longrightarrow \text{restricción intertemp.}$$

$$\Rightarrow \boxed{c_1^* = \frac{1}{(1+\gamma)(1+\beta+\dots+\beta^{T-1})}\left(\sum_{t=1}^{T} \frac{A_t H_t}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})}\right)}$$

riqueza del hogar.

$$c_t^* = \beta^{t-1}(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})\, c_1^*$$

$$\Rightarrow \boxed{c_t^* = \frac{\beta^{t-1}(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})}{(1+\gamma)(1+\beta+\dots+\beta^{T-1})}\left(\sum_{\tau=1}^{T} \frac{A_\tau H_\tau}{(1+r_1)\cdots(1+r_{\tau-1})}\right)}$$

Equilibrio:

cuáles son r_t de equilibrio?

Necesitamos encontrar r_t que vacíen los mercados:

$$\sum_{i=1}^{I} c_{it}^* = \sum_{i=1}^{I} y_{it}^* \quad , \quad t = 1, \dots, T$$

$$y_{it}^* = F_{it}(l_{it}^*)$$

$$\sum_{i=1}^{I} b_{it}^* = 0 \quad , \quad t = 1, \dots, T$$

Asumiendo tecnologías lineales, es posible resolver analíticamente el equilibrio con agentes heterogéneos asumiendo función de utilidad Cobb-Douglas $(\sigma = \nu = 1)$, siempre que individuos tengan el mismo factor de descuento (β) y el mismo parámetro de preferencia por ocio (γ).

$$l_{it}^* = H_{it} - \frac{\gamma c_{it}^*}{A_{it}} \longrightarrow \text{condición intratemporal.}$$

$$y_{it}^* = A_{it} l_{it}^* = A_{it} H_{it} - \frac{\gamma c_{it}^*}{\cancel{A_{it}}} \cdot \cancel{A_{it}} = A_{it} H_{it} - \gamma c_{it}^*$$

cond. de vaciado:

$$\sum_{i=1}^{I} c_{it}^* = \sum_{i=1}^{I} y_{it}^* = \sum_{i=1}^{I} A_{it} H_{it} - \gamma c_{it}^*$$

$$(1+\gamma) \sum_{i=1}^{I} c_{it}^* = \sum_{i=1}^{I} A_{it} H_{it}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{I} c_{it}^* = \frac{1}{1+\gamma} \left(\sum_{i=1}^{I} A_{it} H_{it} \right)}$$

$$c_{it+1}^* = \beta (1+r_t) c_{it}^* \longleftarrow \text{cond. intertemporal.}$$

$$\sum_{i=1}^{I} c_{it+1}^* = \sum_{i=1}^{I} \beta (1+r_t) c_{it}^* = \beta (1+r_t) \sum_{i=1}^{I} c_{it}^*$$

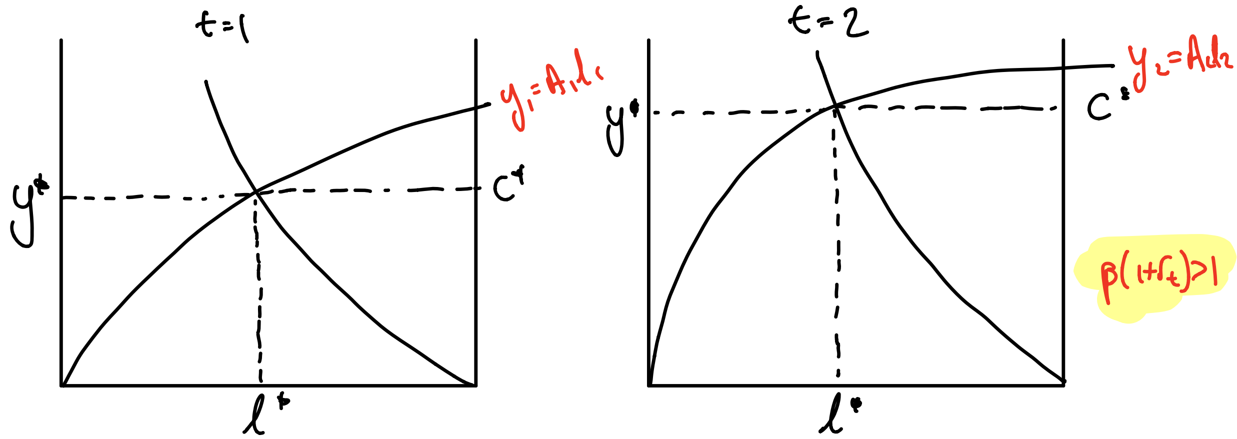
$$\cancel{\frac{1}{1+\gamma}} \sum_{i=1}^{I} A_{it+1} H_{it+1} = \beta (1+r_t) \cdot \cancel{\frac{1}{1+\gamma}} \sum_{i=1}^{I} A_{it} H_{it}$$

$$\Rightarrow \boxed{1 + r_t^* = \frac{\sum_{i=1}^{I} A_{it+1} H_{it+1}}{\beta \sum_{i=1}^{I} A_{it} H_{it}}} \longrightarrow \text{tasa de interés de eq.}$$

Con agente representativo: $I = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} c_t^* = y_t^* = f_t(l_t^*) \\ b_t^* = 0 \end{array}\right\} \text{condiciones de vaciado} \qquad t = 1, \dots, T.$$

Equilibrio es secuencia de equilibrios estáticos.



$c^* = y^*$ $\qquad\qquad\qquad$ $c^* = y^*$

La tasa de interés r_t de equilibrio es exactamente la que hace que los individuos no quieran ahorrar.

$$c_{t+1}^* = \beta(1+r_t)\, c_t^* \quad \Rightarrow \quad 1+r_t = \frac{c_{t+1}^*}{\beta\, c_t^*}$$

$$c_t^* = y_t^* \quad \Rightarrow \quad 1+r_t = \frac{y_{t+1}^*}{\beta\, y_t^*} = \frac{A_{t+1}\, l_{t+1}^*}{\beta\, A_t\, l_t^*}$$

Suponiendo una economía en la que lo único que cambia entre $t=1$ y $t=2$ es $A_2 > A_1$:

$$\boxed{l^* = \frac{(1-\alpha)H}{1-\alpha+\gamma}}$$ — no depende de A.

$l_1^* = l_2^*$. $\quad y_1^* = A_1 l_1^*$, $y_2^* = A_2 l_2^*$

$$\Rightarrow y_2^* > y_1^*$$

$$1+r_1 = \frac{y_2}{\beta y_1} = \frac{A_2}{\beta A_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta(1+r_1) = \frac{A_2}{A_1} > 1}$$

Esto ocurre solamente en una economía cerrada $(b_t = 0)$.
En economía abierta, no necesariamente $b_t^* = 0$. Puede ocurrir que $b_t^* > 0$ o $b_t^* < 0$.

$$\beta(1+r_t) = \frac{1}{1+\rho}(1+r_t)$$

β: factor de descuento

ρ: tasa de descuento.

r_t: "impaciencia del mercado"

ρ: "impaciencia del consumidor".

$\beta(1+r_t) = 1$
$\Updownarrow$
$1+r_t = 1+\rho$

$\beta(1+r_t) > 1$
$\Updownarrow$
$1+r_t > 1+\rho$

Modelo competitivo con producción:

- Hasta ahora asumimos que no habría mercado laboral
- Producción se hacía "en casa".
- Ahora asumimos que sí hay firmas que contratan trabajo a un salario de mercado w.
- Hay J firmas.
- $y_{jt} = f_{jt}(l_{jt}) = A_{jt}\, l_{jt}^{1-\alpha}$
- Problema de la firma:

$$\max_{l_1, l_2, \dots l_T} \sum_{t=1}^{T} \frac{f_{jt}(l_{jt}) - w_t l_{jt}}{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})}$$

→ ganancias totales de la firma en valor presente.

$$\text{CPO: } [l_t]: \frac{f'_{jt}(l_{jt}) - w_t}{\cancel{(1+r_1)\cdots(1+r_{t-1})}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f'_{jt}(l_{jt}) = w_t}$$

→ misma condición de optimalidad de una economía estática.

Es equivalente a decir que firma resuelve:

$$\max_{l_t} f_{jt}(l_{jt}) - w_t l_{jt} \quad \text{en cada } t = 1, \dots, T.$$

Esto ocurre porque el problema de la firma no tiene nada dinámico. En particular, esto ocurre porque no hay capital en la economía.

$$\Rightarrow \text{en eq: } \boxed{l_{jt}^{*} = \left(\frac{(1-\alpha)A_{jt}}{w_t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y_{jt}^{*} &= A_{jt}\left(\frac{(1-\alpha)A_{jt}}{w_t}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \\ \pi_{jt}^{*} &= \alpha A_{jt}\left(\frac{(1-\alpha)A_{jt}}{w_t}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \end{aligned}}$$

Problema del consumidor:

- Asumimos $\sigma = 1 = \vartheta \Rightarrow$ preferencias: $\sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1}(\ln c_t + \gamma \ln h_t)$
- Restricciones:

$h_{it} + n_{it} = H_{it}$ ← restricción de tiempo.

$$c_{it} + b_{it} + \sum_{j=1}^{J} v_{jt}(\theta_{ijt} - \theta_{ijt-1})$$

$$= \underbrace{w_t n_{it}}_{\text{ingreso laboral.}} + (1+r_{t-1})b_{it-1} + \underbrace{\sum_{j=1}^{J} \theta_{ij t-1} \pi_{jt}(w_t)}_{\text{ingresos no laborales / ingresos de capital.}}$$

acciones con las que amanece el individuo en t.

v_{jt} es el valor de la empresa j en el periodo t.

θ_{ijt} = el # de acciones que quiero tener de la empresa

θ_{ijt-1} = # de acciones que ya tengo en la empresa.

$\theta_{ijt-1} = 0.1 \qquad \theta_{ijt} = 0.11$

$$\theta_{ijt} - \theta_{ijt-1} = 0.11 - 0.1 = 0.01$$

$\theta_{ijt} - \theta_{ijt-1}$ = cambio en cantidad de acciones de i en j

$\underline{v_{jt}(\theta_{ijt} - \theta_{ijt-1})}$ → valor a pagar por terminar el día con θ_{ijt} acciones en vez de θ_{ijt-1}.

• Restricción de no Ponzi. • θ_{ij0}, b_{i0} son exógenos.

Mercados: ① bienes ③ crediticio
② laboral ④ accionario.

└ compra y vende acciones al precio v_{jt}

$\Rightarrow$ v_{jt} es un precio más que debemos encontrar en equilibrio.

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1}\left(\ln c_t + \gamma \ln(H_t - n_t)\right) + \sum_{t=1}^{T} \lambda_t\Big(n_t w_t + (1+r_{t-1})\, b_{t-1}$$
$$+ \sum_{j=1}^{J} \theta_{ijt-1} \pi_j(w_t) - c_t - b_t - \sum_{j=1}^{J} v_{jt}(\theta_{ijt} - \theta_{ijt-1})\Big)$$

CPO:

$[c_t]$: $\dfrac{\beta^{t-1}}{c_t^*} = \lambda_t^*$

$[n_t]$: $\dfrac{\beta^{t-1}\gamma}{H_{it} - n_{it}^*} = \lambda_t^* w_t$

$[b_t]$: $\lambda_t^* = (1+r_t)\lambda_{t+1}$

$[\theta_{ijt}]$: $-\lambda_t v_{jt} + \lambda_{t+1}\left(\pi_j(w_{t+1}) + v_{jt+1}\right) = 0$

$$\Rightarrow \lambda_t v_{jt} = \lambda_{t+1}\left(\pi_j(w_{t+1}) + v_{jt+1}\right)$$

Cond. de optimalidad:

$\dfrac{\gamma c_t^*}{H_t - n_t^*} = w_t$ → cond. intratemporal.

$\dfrac{c_{t+1}^*}{c_t^*} = \beta(1+r_t)$ → cond. intertemporal.

$$\frac{\cancel{\lambda_t} v_{jt}}{\cancel{\lambda_t}} = \frac{\cancel{\lambda_{t+1}}\left(\pi_j(w_{t+1}) + v_{jt+1}\right)}{\cancel{\lambda_{t+1}}(1+r_t)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{1+r_t}_{\text{retorno de bonos.}} = \underbrace{\frac{\pi_j(w_{t+1}) + v_{jt+1}}{v_{jt}}}_{\text{retorno de invertir en la empresa } j.}$$

→ condición de no arbitraje.

v_{jt}: costo que pago hoy por el activo

$\pi_j(w_{t+1}) + v_{jt+1}$: lo que recibo mañana por el activo.

En eq. individuo debe ser indiferente entre invertir en bonos o invertir en empresas.

Supongamos que:

$$1+r_t < \frac{\pi_j(w_{t+1}) + v_{jt+1}}{v_{jt}}$$

$\Rightarrow$ individuo puede pedir ∞ deuda y comprar ∞ acciones

En eq. el individuo es indiferente entre invertir en empresas o en bonos. los dos activos le dan exactamente el mismo retorno al hogar: son sustitutos perfectos,

$\Rightarrow$ proporción de demanda en acciones vs bonos es indeterminada en equilibrio.

lo que no es indeterminado es la cantidad total que el hogar invierte en acciones + bonos.

$\Rightarrow$ vamos a ignorar el mercado accionario y asumimos que el hogar solamente usa bonos para transferir recursos a través del tiempo:

$$c_t + b_t = w_t n_t + (1+r_{t-1}) b_{t-1} + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij0} \pi_j(w_t)$$

Óptimo: • restricción presupuestal.
• condición intertemporal
• condición intratemporal.

Debemos imponer condición de no Ponzi:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{b_T}{(1+r_1)\dots(1+r_{T-1})} \geq 0$$

Y en óptimo se cumple condición de transversalidad:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{b_T}{(1+r_1)\dots(1+r_{T-1})} = 0$$

Equilibrio con agente representativo:

$$c_t^* = y_t^*, \quad n_t^* = l_t^*, \quad b_t^* = 0$$

$$\frac{\gamma c_t}{H_t - n_t} = (1-\alpha)\frac{y_t}{l_t} \qquad \Rightarrow \frac{\gamma \cancel{y_t}}{H_t - n_t} = (1-\alpha)\frac{\cancel{y_t}}{l_t}$$

y_t

$n_t = l_t$

$$\Rightarrow \boxed{l_t^* = \frac{(1-\alpha)H}{1-\alpha+\gamma}}$$

$$\boxed{1+r_t = \frac{c_{t+1}}{\beta c_t} = \frac{y_{t+1}}{\beta y_t}} \quad \dots \quad \boxed{y_t^* = A_t\left(\frac{(1-\alpha)H}{1-\alpha+\gamma}\right)^{1-\alpha}}$$

⋮

Valor de las empresas en equilibrio:

Para T finito:

$$1+r_t = \frac{\pi_j(w_{t+1}) + v_{jt+1}}{v_{jt}} \quad \text{— para todo } t.$$

En T, $v_{jT} = 0$:

En T-1: $v_{jT-1} = \dfrac{\pi_j(w_T) + \cancel{v_{jT}}^{\to 0}}{1+r_{T-1}}$

En T-2: $v_{jT-2} = \dfrac{\pi_j(w_{T-1}) + v_{jT-1}}{(1+r_{T-2})}$

$$= \frac{\pi_j(w_{T-1})}{1+r_{T-2}} + \frac{\pi_j(w_T)}{(1+r_{T-1})(1+r_{T-2})}$$

$$\vdots$$

$$\boxed{v_{jt} = \sum_{\tau=t+1}^{T} \frac{\pi_j(w_\tau)}{(1+r_t)(1+r_{t+1})\cdots(1+r_{\tau-1})}}$$

$$\boxed{v_{j1} = \sum_{\tau=2}^{T} \frac{\pi(w_\tau)}{(1+r_1)\cdots(1+r_{\tau-1})}} \longrightarrow$$

valor de la empresa es igual al flujo descontado o en valor presente de los beneficios de la empresa.